奈良新聞社 掲載許諾済

奈良教育大学

なっきょんサイエンス 4

ベータ展開と新たな世界の入り口

慣れ親しんだ対象を「一般化」

設定変更で開く未知の世界

数学の研究は身近なところから始めることができます。皆さんがよく目にする数字の表し方のルールについて考えてみましょう。例えば、524という数字は、5×100＋2×10＋4×1と表せます。ここで、1は0個の10を掛けたものだと見なせば$1=10^0$であると言えます。これと$100=10\times10=10^2$より、$524=5\times10^2+2\times10^1+4\times10^0$が分かります。このような10に基づく数の考え方を10進法と言い、このような数の表し方を10進展開と呼びます。数学の研究では、こういった慣れ親しんだ対象の「一般化」を目指すことがしばしばあります。そこでNを2以上の整数とし、10進法の一般化であるN進法というものについて考えてみましょう。10進法では10^kの位の数は0から9のどれかだったため、N進法ではN^kの位の数は0～N－1のどれかだと考えると良さそうです。

例として、N＝2のときについて考えてみましょう。2進法の世界では2^kの位の数は0か1のどちらかです。したがって2進法では1と0を使って表せる数は存在しますが、524などの数は存在しません。このようなある場所に2以上の数が現れる場合はどう考えるべきでしょう？ その答えは「繰り上げ計算」の中にあります。10進法では9の次は10、19の次は20、というように繰り上げを行うことで10以上の数を表現しています。2進法でも同じように繰り上げ計算をすることで2以上の数を2進法の世界に組み込むことができます。具体的には、1の次は10、11の次は100とし、2と10を同じものとみなせば2進法の繰り上げ計算が表現できます。

さて、N進法をさらに一般化してみましょう。N進法の一般化（のうちの一つ）は自然数とは限らない$\beta>1$に基づく数の考え方で、これをベータ展開と呼びます。例として黄金比gに基づく数の考え方を見てみましょう。ここで黄金比とは、$X^2-X-1=$の1より大きな解を指します。2次方程式の解の公式を使うと、

$$g=(1+\sqrt{5})\div2=1.618\cdots$$

であることが分かります。また、gに基づく数の考え方では、g^kの位の数はより小さい整数である0か1のどちらかと考えるのが良さそうです。しかし、このときの繰り上げ計算　　れまでと少し違います。今、gは$g^2=g+1$を満たしますが、この式は$1\cdot g^2=1\cdot g^1+1\cdot g^0$と読み取れます。このことに注意すると、左辺が100、そして右辺が11であるため、gに基づくベータ展開では11を100とみなすという中途半端な繰り上げが現れることが分かります。そのため、gに基づくベータ展開では11は存在しません。

このように、数学では少し設定を変更するだけで未知の世界が簡単に開かれます。今回紹介したベータ展開では、「有限性条件」と呼ばれる有限小数を一般化した性質について今も様々な研究が行われています。皆さんも身近な対象の設定を少し変えることで新たな世界を開拓してはいかがでしょう？

（奈良教育大学 理数教育研究センター特任講師、高溝史周）＝毎月第１日曜掲載＝