微分方程式論の一端を覗く

―自由落下運動と２次元点渦系を例に―

Ryo Takahashi
高橋　亮
奈良教育大学 数学教育講座

微分方程式論の一端を覗く

－自由落下運動と２次元点渦系を例に－

奈良教育大学　数学教育講座　高橋 亮

１．はじめに

数学は基礎学問の１つであり、その歴史は古代バビロニアにまで遡るといわれます。数学は代数学・幾何学・解析学の３つに大別されます。著者の研究分野は微分方程式論で、解析学に属する分野です。微分方程式論では通常、何らかの自然現象を記述する数理モデルを研究対象とします。自然現象は多種多様ですが、それに伴って微分方程式も多種多様です。したがって、研究対象は大変広範であり、すべてに精通することは不可能と断言してよいくらいに非常に多くの研究がなされています。本稿は、古典力学で最も簡単な微分方程式である自由落下の方程式と、著者が研究している２次元点渦系の方程式を例にとり、微分方程式論の一端に触れることを目的とします。

次節以降、数学の記号がふんだんに使用されます。数学で説明を行うと、内容が分かりにくくなると思われがちですが、それは誤りです。「数学は自然科学の言語である」といわれますが、これは自然現象を説明するために数学を用いることが最適であることに由来します。数学で説明すれば、自然現象の記述が鮮明となり、忍耐力があれば誰もが理解できる形となるからです。

この記事では、著者の力量不足や紙数の制限のために説明できなかった言葉が散見されます。そのため、この記事は読みづらいと思われます。しかし、そこはご辛抱いただき、(未知の言葉を調べるために) パソコンやスマートフォンをそばに置いて次節以降をご一読いただければ幸いです。

２．微分方程式とは

この節で、微分方程式とは何かを簡単に説明しておきましょう。その名のとおり、微分方程式は微分の項が入った方程式です。言葉としては、「微分」と「方程式」から成ります。具体例を挙げる前に、復習（または予習）を行いましょう。

微分は高校数学で学習する概念で、ある量の変化率を表す指標として知られています。数学の言葉で説明すると、x を変数とする実数値関数 $f(x)$ に対して、その微分（導関数、微分係数ともよばれる）$f'(a)$（$df/dx(a)$ とも書かれる）は次のように定義されます。

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

(1) は $x = a$ での $f(x)$ の瞬間変化率を表しています。幾何学的には、グラフ$y = f(x)$ の $x = a$ での接線の傾きを表しています。一方、方程式は中学数学で学習する概念です。方程式は未知変数を含む等式のことで、その等式を成立させる未知変数を解とよびます。例えば、$2x + 3 = 0$ は一次方程式とよばれ、その解は $x = -3/2$ です。

言葉を準備したところで、微分方程式の簡単な例を一つ挙げておきます。高校物理で自由落下運動を学習します。自由落下の運動方程式は次のように記述されます。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg \tag{2}$$

ここで、m は質点の質量、t は時間、$x = x(t)$ は質点の位置（位置は鉛直下向きを正の向きとする）、d^2x/dt^2 は質点の加速度（dx/dt は質点の速度をあらわすので、加速度は速度の瞬間変化率と解釈する）、g は重力加速度をあらわします。数学の言葉で置き換えると m、g は定数、t は独立変数、$x = x(t)$ は未知関数です。したがって、(2) は（t を独立変数とする）x についての微分方程式です。d^2x/dt^2 という微分の項が入っていることに注意してください。(2) の解は次のように与えられます（自力で確認してみましょう）。

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{2}gt^2 \tag{3}$$

ここで、$x(0)$ は質点の初期位置をあらわします。また、質点の初期位置が決まれば、(2) の解が一意的であることも示すことができます。このとき、(2) は適切性をもつ（解が一意的に存在する）といいます。本来、初期値に対する連続性を適切性の条件に加えるべきですが、説明がややこしくなるので、ここでは省略します。

(2) のような簡単な微分方程式を除いて、一般に微分方程式は求積法で解を求める（式変形で解を求める）ことはできません。そのため、適切性は決して自明ではありません。実際、解が存在しないような場合もありますし、解が複数個ないしは無限個存在するような場合もあります。このような数学的事象は、数理モデルが自然現象を記述するのに妥当であるか否かという根本的な問題を生み出しました。また、微分方程式の解の挙動は、各々の微分方程式で分別されるほど多種多様で、それを解説する文献は数えきれないほど存在します。このように、微分方程式はバラエティに富んだ研究対象であることがわかります。

３．２次元点渦系

ノルウェーの物理学者ラルス･オンサーガー（1968 年ノーベル化学賞受賞）は、台風や木星上で観測される大赤斑の渦構造を研究するために２次元点渦系の数理モデルを提唱しました。

ここで、いくつか言葉を導入します。最初に、流体という概念を導入します。ウィキペディアによれば、流体とは固体でない連続体のことであり、物質の形態としては液体と気体およびプラズマがそれにあたります。例えば、水、油、空気、稲妻、半導体はすべて流体です。本記事では、粘性が無視できるような流体（非粘性流体：空気やガスなど）を研究対象とします。次に、渦度という概念を導入します。渦度とは、３次元空間における流体の回転の様相をあらわすベクトル量で、流れの速度がなすベクトル場の回転として定義されます。２次元における非粘性流体の運動に関しては、渦度をスカラー量とみなすことができます。この場合、渦度の絶対値は渦の強さ、渦度の符号は渦の向きをあらわします。もし渦度分布がある点に集中しているとみなせるならば、その渦度分布を点渦（または渦糸）とよびます。数学的には、

各点渦をディラックのデルタ関数で記述します。

２次元点渦系は、２次元空間に点渦を散りばめて、各点渦の挙動を記述する微分方程式です。ここでは数式の記述を省略しますが、各点渦はお互いに作用しあい、点渦が十分多くあるとカオス現象が発現し、非常に複雑な挙動を示すことがわかっています。したがって、興味があるのは点渦が十分多くある場合です。そこで、点渦の個数を無限大に近づけるとどうなるか、という疑問が生じます。この極限操作で得られる微分方程式はいくつか提唱されています。著者が研究している微分方程式はそのうちの一つですが、若干複雑なので、ここではこれまでによく研究されている平均場方程式を紹介します。それは次のように記述されます。

$$-\Delta v = \lambda \frac{e^v}{\int_\Omega e^v} \quad \text{in } \Omega, \qquad v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \tag{4}$$

ここで、(4) にあらわれた記号の説明をします。$v = v(x)$ は未知関数で、流れ関数とよばれるものです。$x = (x_1, x_2)$ は独立変数で、２次元の座標と考えて差し支えありません。λ は逆温度とよばれる物理量に関連した正定数（またはパラメータ）です。e は高校数学の数学Ⅲで学習するネピアの数です。Ω は２次元上の領域で、$\partial\Omega$ は Ω の境界をあらわします。$\int_\Omega$ は Ω 上の積分をあらわします。 “in Ω” は “$x \in \Omega$ に対して”、 “on $\partial\Omega$” は “$x \in \partial\Omega$ に対して” と解釈します。Δ はラプラシアンとよばれる微分作用素で、次のように定義されます。

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \tag{5}$$

ただし、$\partial/\partial x_i \ (i = 1, 2)$ は偏微分とよばれるもので、次のように定義されます。

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_1}(a, b) &= \lim_{h \to 0} \frac{v(a + h, b) - v(a, b)}{h} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2}(a, b) &= \lim_{h \to 0} \frac{v(a, b + h) - v(a, b)}{h} \end{aligned} \tag{6}$$

(1) と (6) が類似であることに注意すれば、(6) の第一式、第二式はそれぞれ $x = (a, b)$ での $v(x)$ の x_1 方向の瞬間変化率、$x = (a, b)$ での $v(x)$ の x_2 方向への瞬間変化率をあらわしていることがわかります。したがって、(5) の右辺は $v(x)$ を x_1 について２回偏微分したものと $v(x)$ を x_2 について２

回偏微分したものとの和をあらわします。関数にラプラシアンを作用させたときの値は関数の形状に関係しています。１次元の場合、ラプラシアンに対応するものは２階導関数であり、その正負が関数の凹凸を決定づける一つの指標となることが知られています（このことは高校数学の数学Ⅲで学習します)。同様のことが、２次元の場合に対しても成立します。このように、(4)は偏微分の項を含むため偏微分方程式とよばれます。これと比して、(2) は常微分方程式とよばれます。この区別のために独立変数の個数に注意しましょう。

記号の説明をここで終えて、(4) の解について知られている数学的結果の一部を紹介しましょう。

$\Omega = B_1 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$、すなわち領域が単位円の内部の場合、解は $\lambda < 8\pi$ のときのみ存在します。さらに $\lambda \uparrow 8\pi$ のとき、解は凝縮を起こします。すなわち、解は ”何らかの意味” で $-4\log|x|$ に収束します（ここで、$|x| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ です)。”何らかの意味” の説明は省略しますが、$-4\log|x|$ は特異解であり、原点 $(0,0)$ を含む領域では通常の関数として定義されません。このことを真に理解するには、超関数、弱収束といったアドバンスドな内容を学習する必要があります。一方、$\Omega = B_1 \setminus B_r = \{x = (x_1, x_2) \mid r^2 < x_1^2 + x_2^2 < 1\}$、すなわち領域が円環の場合、すべての λ に対して解が存在します。

これらの結果からわかることは、(4) の解の性質は領域の形状によって変わるということです。また、8π という値や $-4\log|x|$ という関数が出現することも不思議です。ここでは単純な領域に対する結果（しかもごく一部）しか述べることができませんでしたが、より一般の領域に対しても様々な数学的結果が知られています。この節で述べた内容を真に理解するために、下記参考文献【２】を読むとよいでしょう。

４．おわりに

前節までに、自由落下の運動方程式と２次元点渦系の方程式を例に挙げ、微分方程式論のイントロダクションを試みました。もし微分方程式論に興味を持ったのならば、常微分方程式から勉強を始めることをおすすめします。

私的見解ですが、２つの間口から入門するとよいと考えます。一つ目は古典力学です。たいていの古典力学の教科書には、典型的な常微分方程式とその解法が記載されており、(物理的内容を除き数学的内容だけをみれば) 難易度は高くありません。そこでは物理現象と常微分方程式の関連性も概観することができるでしょう。二つ目は常微分方程式系の力学系です。これに関しては、下記参考文献【１】の一読を推薦します。常微分方程式の解を求積しなくとも解の性質を調べることができることを、豊富な例によって解説しています。また、常微分方程式は数値シミュレーションと相性がよいので、もし余力があれば、常微分方程式の解を数値シミュレーションによって可視化すると勉強が楽しくなるかもしれません。

［ 参考文献 ］

【１】Morris W.Hirsch 他、『Hirsch・Smale・Devaney 力学系入門―微分方程式からカオスまで』、共立出版 (2007 年)

【２】鈴木貴、大塚浩史、『楕円型方程式と近平衡力学系（上）－循環するハミルトニアン―』、朝倉書店 (2015 年)

高橋 亮（Ryo Takahashi）

2009 年　大阪大学大学院 基礎工学研究科 博士後期課程修了「博士（理学）」
2010 年　大阪大学大学院 基礎工学研究科 システム創成専攻 数理科学領域 助教
2015 年　奈良教育大学 数学教育講座 特任准教授

【研究テーマ】

数学の一分野である微分方程式論を研究しています。とりわけ、特異性が発現する楕円型・放物型偏微分方程式に興味を持っています。現象的には異なる事象であっても、数学的には共通した性質があります。そのような性質を見出すことにより、自然現象の構造解明を目指しています。

【著者の自己紹介】

ー趣味　散歩、猫カフェ

ー座右の銘　人間万事塞翁が馬

ー入学までに勉強してほしいこと　入試勉強もよいですが、講談社のブルーバックスシリーズで数学に関連する図書を読むとベターです。初読の際にわからなくても、いずれ絶対に理解するぞという気持ちを維持できればさらにベターです。

微分方程式論の一端を覗く

著者　高橋（たかはし）　亮（りょう）
2016 年 2 月 29 日 第 1 版
奈良教育大学出版会
〒630-8528
　奈良市高畑町
　TEL: 0742 (27) 9135　FAX: 0742 (27) 9147
　E-mail: g-kenkyu@nara-edu.ac.jp
　URL: http://www.nara-edu.ac.jp/PRESS/