最終更新日：2024年6月27日

理数教育研究センター　高溝 史周 特任講師

ベータ展開と有限性条件について

キーワード　ベータ展開/　有限性条件/　エルゴード的力学系/

どのような研究をなぜ行っているか

$x>0$ が小数点を用いて $x=a_1\cdots a_{n-1}a_n.a_{n+1}a_{n+2}\cdots$ と表されている場合、

$$x=a_1\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\cdot 10+a_n+\frac{a_{n+1}}{10}+\frac{a_{n+2}}{10^2}\cdots$$

と書き直すことができます。これを10進展開と呼びます。このような展開で、基数と呼ばれる10を整数とは限らない実数 $\beta>1$ に変えたものを β-展開と呼びます。x の β-展開で現れる a_n において、十分大きいすべて番号 n に対し $a_n=0$ となるとき、 x は有限 β-展開を持つといいます。有限 β-展開は10進展開で言うところの有限小数に相当する概念です。

有限小数に関しては、次のよく知られた結果があります。

$$\text{有理数 } q=\frac{b}{a}\ \text{(既約分数)が有限小数} \Leftrightarrow a=2^k5^l\ (k,l\ \text{は } 0\ \text{以上の整数})$$

この性質を有限 β-展開の場合に一般化したものを β-展開の有限性条件と呼び、今日では次の3つが知られています。

$$\text{(F)}\ \ \mathbb{Z}[\beta^{-1}]\cap[0,\infty)=\mathrm{Fin}(\beta)$$
$$\text{(PF)}\ \ \mathbb{N}_0[\beta^{-1}]=\mathrm{Fin}(\beta)$$
$$(\mathrm{F}_1)\ \ \mathbb{N}_0\subset\mathrm{Fin}(\beta)$$

ここに、 $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ で、$M\subset\mathbb{Z}$ に対し $M[\beta^{-1}]$ で M と β^{-1} によって生成される環を表します。私は、この β-展開の有限性条件、特に (F_1) について興味を持っています。というのも、これまでの先行研究から (F) と (PF) についてはいくつかの性質が知られているためです。実際、β が (PF) を満たすための必要十分条件が、最小多項式の係数条件で与えられています。他にも、(PF) を満たす β が (F) を満たすための条件も知られています。その一方、(F_1) については詳しいことが分かっていませんでした。最近の研究により、(F_1) の十分条件が発見され、それによって (PF) を満たさないが (F_1) を満たす β が発見されました。そこで現在、私はその (F_1) の十分条件が必要十分条件ではないかと予想し、その予想の解決に向けて研究を行っています。また (PF) でない (F_1) を満たす β は現在3次でしか見つかっていません。これについても私は興味を持っており、より次数の高い (F_1) を満たす β の発見についても並行して研究を行っています。

研究成果をどのように活用し、どのような貢献ができるか

今日、数値解析や統計学的な推定においては、ランダムサンプリングなどを利用して確率的シミュレーションを行っています。そのため、予測困難な記号列を生成するアルゴリズムの重要性はますます高まっています。β-展開では、しばしば複雑な記号列が現れるため、これらの技術へ活用が見込まれています。また、$x\in[0,1)$ の β-展開は β-変換と呼ばれる $T:x\mapsto(\beta x\ \text{の小数部分})$ を繰り返す利用することによって記述できます。特に β がピゾ数と呼ばれる代数的整数の場合には、この T の双対力学系においてタイル張りが生成されることが知られています。ここで双対力学系とは、T を将来方向の時間変化を表すとした場合、過去に遡る時間変化を表す変換と状態空間を組にした力学系のことです。昨今、タイル張りによる繰り返しパターンの生成は、複雑な画像処理を単純化するために活用されています。このように、β-展開は様々なIT技術への応用が期待されており、今後さらなる発展が見込めると私は考えてています。

奈良教育大学　教育研究支援課 学術研究推進係 0742-27-9135　g-kenkyu@nara-edu.ac.jp