クローズアップ

本学教員の研究を詳しく紹介

# 数学を見直してみよう
## ―微分方程式を交えて―

数学教育講座 准教授 高橋(たかはし) 亮(りょう)

### 数学は役に立つが、その応用は知覚困難である

私たちは義務教育を受ける際に算数・数学を学習します。人によっては、高校・大学においても数学の学習を続けます。そのときに、「数学は何の役に立つのか？」と考える方は少なくないのではないでしょうか。先にこの疑問に対する結論を述べれば、数学は役に立っています。

例えば、数学を用いずに建物、道路、遊具等をつくった場合、それらは要求される安全性を持っていない可能性があります。数学と諸分野の理論がうまく合わさることによって安全性が保障されるわけです（道路、ジェットコースターに関しては、クロソイド曲線を調べてみるとよいでしょう）。

また、私たちが普段使用している電子機器は電子回路によって制御されているわけですが、その正常な制御のために数学が必要不可欠です。他にも身の回りで数学が応用されているものは無数に存在します。インターネットを用いて身の回りのものを調べてみるとよいでしょう。ただ、数学の応用は知覚困難であるため、上記の疑問が生じるのだと思われます。

### 現象と微分方程式

前述のとおり、数学が応用される対象は無数にあります。対象を調べるためには、それに関与する現象を調べる必要があります。

現象を詳細に調べるためには、現象を表現する数式が必要となります。現象を表現する数式はいろいろありますが、その中の主たるものとして「微分方程式」が挙げられます（微分方程式：微分（導関数）を含む方程式）。その理由を大ざっぱに述べます。現象を考察する際、我々は大抵（調べたい）量の変化に注目します。微分は、ある量の瞬間的変化率をあらわします。したがって、ある量の変化を考察するために、微分があらわれることは自然だと言えるでしょう。このことと諸分野の原理が組み合わさることによって微分方程式が導出されます。

以上のことをまとめて一考すると、現象を表現する主たる方法として微分方程式を挙げることがわかるかと思われます。そうすると、現象の数だけ微分方程式がある、といっても過言ではないかもしれません。面白いと思いませんか？

下：研究室のメンバーと

## 微分方程式論の研究者を志す

私が微分方程式と出会ったのは大学学部2回生の時です。その頃は、不勉強のせいもあり、微分方程式を、2次方程式などの数学にある方程式の一種であるという狭い捉え方をしていました。しかし、大学学部の卒業論文作成時に微分方程式を本格的に勉強し始めると、その捉え方は消えて、前述のとおり「様々な現象が微分方程式で記述できるのは面白い」と思い始め、いろいろ勉強していくうちに「微分方程式がわかってくるといろいろなものがみえてきそうだ」と考えるようになりました。

この考えが次第に膨らんでいき、修士時代に微分方程式論の研究者を志しました。さて、ここまで数式が出てきていないため、次節以降では、いくつか数式を交えて話しを続けることにします。

## 数学の問題のほとんどはきれいに解けない

私たちは中学生の頃に2次方程式を学習します。図1の①にある方程式が2次方程式の一例で、それをみたす「数」$x$ を求めなさい、という問題です。大学に進学すると微分方程式を学習することもあります。図1の②にある方程式が微分方程式の一例で、それをみたす「関数」$x=x(t)$を求めなさい、という問題です。①については、解の公式または因数分解による方法で解くことができます。②については、大学レベルの数学を用いると、簡単な計算によって解を求めることができます。①と②はどちらも解をきれいに求めることができます。

それでは、図2の③、④はどうでしょうか？③は5次方程式ですが、きれいに解を求めることができません。実際、③を代数的に解くことが不可能であることを、ガロア理論を用いて証明することができます。④は単振り子の方程式です。楕円関数を用いてその解を表示することができますが、楕円関数は決して易しいものではありません。実際、その解表示を用いて解の値を求めたり、解のグラフを図示しようとするとき、コンピュータの力を必要とするでしょう。ここで主張したいことは、高校までに取り組む数学の問題の多くが特殊なものであるということです。実際、それらは式変形等の比較的簡単な操作できれいに解けるわけです。

しかし、私たちの世界にあらわれる現象は、数学の枠組みにおいて③や④よりも遥かに複雑かつ難解であり、きれいに解くどころか、解を具体的に書き下すことさえ不可能です（例：三体問題、二重振り子など）。では、解を具体的に書き下すことができない問題をどのように解けばよいのでしょうか？この問いに対する解答は、大学数学や研究レベルの数学にあります（詳細は割愛します）。

下：授業での様子

## 私の研究の流れの紹介

私は現在、いくつかの非線形楕円型・放物型偏微分方程式を研究しています。その1つが図3の⑥にある微分方程式です（Δ（ラプラシアン）が微分に相当）。図3の2つの微分方程式⑤と⑥を比較すると、⑤の方がシンプルで、⑥はそれを少し拡張したものであることが見た目でわかります。ちなみに、どちらも解を具体的に書き下すことは不可能です。私は⑥を研究する際、⑤に関する過去の研究を参考にし、まずは⑤と⑥の類似点を調べました。実際いくつか類似点はあったわけですが、計算過程を吟味していくと、⑤と⑥の間に相違点が見つかりました。

この相違点が新しい結果につながりました。その新しい結果と⑤の過去の研究を参考にし、さらに新しい結果を追究しているのが現状です。

以上が私の研究の流れです。

## 歴史を調べてみよう

前節で、研究を行う際に過去の研究を参考にしている、と述べました。高校数学までのレベルであれば、これは数学の発展の歴史を調べることに相当していると考えられます。数学を勉強しているとき、「なぜこのような概念が出てきたのか」と思ったことはないでしょうか。その問いの解答は歴史に隠されています。あえて具体例は挙げませんが、歴史を調べるためにインターネットを活用してみましょう。ただし、間違った情報が記載されている可能性があるため、そこには注意を払いましょう。

歴史を調べることによって、数学のより深い理解に加え、算数・数学を学ぶ意味を感じ取ってもらえれば、それは教育者としての私の本望です。

① （方程式）　$x^2 - 5x + 6 = 0$

（解）　$x = 2, 3$

② （方程式）　$\dfrac{d^2x}{dt^2} - 5\dfrac{dx}{dt} + 6x = 0$

（解）　$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$　（$C_1, C_2$ は任意定数）

図1 2次方程式および簡単な微分方程式の例

③ （方程式）　$x^5 - 3x^4 + 1 = 0$

（解：実数解のみ）　$x = -0.72005\cdots,\ 0.823284\cdots,\ 2.98745\cdots$

④ （方程式）　$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\sin x$

（解）　略（楕円積分の知識が必要）

図2 きれいに解くことができない5次方程式および微分方程式の例

⑤
$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda \dfrac{e^v}{\int_\Omega e^v dx} & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

⑥
$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda \dfrac{\tau e^v + (1-\tau)\gamma e^{\gamma v}}{\int_\Omega \tau e^v + (1-\tau) e^{\gamma v} dx} & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

（※ $\tau = 1$ とすると⑤と同じ方程式になる）

図3 私の研究対象である非線形楕円型偏微分方程式

プロフィール

数学教育講座

准教授 高橋（たかはし）　亮（りょう）

専門は偏微分方程式論。

大阪大学大学院基礎工学研究科博士後期課程を修了（2009）、博士（理学）。

大阪大学大学院基礎工学研究科システム創成専攻数理科学領域助教、

奈良教育大学数学教育講座特任准教授を経て、2018年から現職。